ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ	2000
Seria: BUDOWNICTWO z.	Nr kol.

Andrzej POWNUK

HYBRYDOWA METODA PRZEDZIAŁOWEJ I GRADIENTOWEJ OPTYMALIZACJI GLOBALNEJ KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

Streszczenie. Przedziałowa metoda globalnej optymalizacji jest bardzo stabilna oraz może zostać zastosowana do rozwiązywania szerokiej klasy problemów inżynierskich. Metoda ta gwarantuje, że wszystkie globalne minima zostaną znalezione. Niestety algorytm ten posiada bardzo wysoką złożoność obliczeniową. W pracy opisano hybrydową metodę wykorzystującą oprócz algorytmów przedziałowych algorytmy gradientowe. Zastosowanie algorytmu zostało przedstawione na przykładzie konstrukcji kratowych.

HYBRID INTERVAL AND GRADIENT METHOD FOR GLOBAL OPTIMIZATION OF ENGINEERING STRUCTURES

Summary. An interval global optimization method is very stabile and robust and universally applicable. The interval algorithm guarantees that all stationary global solutions have been found. Unfortunately application of this algorithm is sometimes a very time consuming task. In this paper a hybrid gradient-interval global optimisation method is presented. This method has the best features of both methods i.e. fast local and reliable global convergence. In this paper this algorithm was applied to optimization of truss structures.

1 Wprowadzenie

Algorytmy optymalizacji globalnej można podzielić na dwie grupy, do jednej można zaliczyć metody, które poszukują globalnego minimum tylko z pewnym prawdopodobieństwem oraz metody, które gwarantują znalezienie globalnego minimum z zadaną dokładnością. Do pierwszej grupy można zaliczyć różnego rodzaju algorytmy stochastyczne. Najważniejszą grupą metod, którą można zaliczyć do metod drugiego typu są metody, w których problem globalnej optymalizacji zostaje zastąpiony ciągiem problemów optymalizacji dyskretnej. Algorytm obliczeń jest następujący:

1) przestrzeń poszukiwań dzieli się na skończoną ilość podprzestrzeni;
2) w każdej podprzestrzeni w przybliżony sposób szacujemy wartości funkcji celu;
3) eliminuje się obszary, które na pewno nie zawierają globalnego minimum;

Podstawową różnicą pomiędzy algorytmami tej grupy są sposoby oszacowania wartości funkcji dla poszczególnych części przestrzeni poszukiwań. Minimum funkcji może zostać oszacowane przy pomocy arytmetyki przedziałowej [3] lub innych metod [6]. Niestety metody te posiadają bardzo wysoką złożoność obliczeniową [3, 7].

Jednymi z najbardziej efektywnych metod lokalnej optymalizacji są metody gradientowe (por. np. [2]). Zwykle do efektywnej realizacji tych algorytmów stosuje się metody analizy wrażliwości [4].

W niniejszej pracy skonstruowano hybrydowy algorytm, który najpierw poszukuje lokalnego minimum przy pomocy metod gradientowych, a następnie sprawdza czy otrzymane minimum jest globalne przy pomocy metod przedziałowych.

2 Gradientowa metoda lokalnej optymalizacji

Z matematycznego punktu widzenia problem optymalizacji można sformułować następująco:

$$\begin{cases} min\ J(\mathbf{x}) \\ g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{for} \quad j = 1,\dots,m_{in} \\ p_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{for} \quad i = 1,\dots,m_{eq} \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $J : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ jest funkcją celu, n jest liczbą zmiennych projektowych x_i, m_{in} jest liczbą warunków nierównościowych, m_{eq} jest liczbą warunków równościowych. W analizowanych przykładach funkcjonał J będzie równy ciężarowi analizowanej konstrukcji:

$$J = \sum_{i=1}^{ne} \gamma \cdot A_i \cdot L_i \tag{2}$$

Warunki nierównościowe będą określone następująco:

$$g_i(x) = \sigma_0 - |\sigma_i| \geq 0 \tag{3}$$

$$g_j(x) = |\sigma_j| A_j - \frac{\pi^2 E J_j}{L_j^2} \geq 0 \tag{4}$$

gdzie σ_0 jest naprężeniem dopuszczalnym, σ_i jest naprężeniem w i-tym pręcie, L_i jest długością i-tego pręta, E jest modułem Younga, J_i jest momentem bezwładności jest przekroju i-tego pręta, γ jest ciężarem właściwym materiału, z którego wykonana jest kratownica. Spełnienie warunków g_j zapewnia konstrukcji odpowiednią stateczność, a spełnienie warunków g_i wystarczającą wytrzymałość.

Warunkami równościowymi, są równania równowagi o następującej postaci:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \tag{5}$$

gdzie **K** jest macierzą sztywności, **Q** jest wektorem sił przywęzłowych, **x** jest wektorem zmiennych projektowych.

Do lokalnej optymalizacji w niniejszej pracy została zastosowana metoda najszybszego spadku (por. np. [2]). Kolejne kroki algorytmu są następujące:

1) Wprowadzić dane początkowe i=0, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$.
2) Obliczyć $J(\mathbf{x}^i)$ oraz $g_j(\mathbf{x}^i)$.
3) Zidentyfikować więzy aktywne i nieaktywne.
4) Obliczyć gradient funkcji celu.
5) Określić nowy kierunek poszukiwania $\mathbf{d}^i$
6) Przeprowadzić poszukiwanie najmniejszej wartości funkcji celu w kierunku $\mathbf{d}^i$ oraz określenie wartości parametru α.
7) Obliczyć $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \alpha \cdot \mathbf{d}^i$
8) Jeśli warunki zbieżności są spełnione, to zakończyć obliczenia, w przeciwnym przypadku przyjąć $i = i + 1$ i powrócić do punktu 2.

Przy obliczaniu gradientu funkcji celu szeroko stosowane są metody analizy wrażliwości [4]. Prezentowany tutaj algorytm lokalnej optymalizacji może być zastąpiony przez dowolny inny algorytm optymalizacji lokalnej [6].Algorytm przedziałowej optymalizacji globalnej

Niech $\left[\hat{f}([\mathbf{x}])^-, \hat{f}([\mathbf{x}])^+\right] = hull\ \hat{f}([\mathbf{x}])$, $[\mathbf{x}_1],[\mathbf{x}_2] \in \mathrm{IR}^n$, $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, IR jest zbiorem wszystkich domkniętych przedziałów liczbowych oraz $\hat{f} : \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR}$ jest naturalnym przedziałowym rozszerzeniem funkcji [5].

Algorytm przedziałowej optymalizacji globalnej oparty jest na następującej własności [3]. Jeśli zachodzi następująca nierówność:

$$\hat{f}([\mathbf{x}_1])^+ < \hat{f}([\mathbf{x}_2])^- \tag{6}$$

to

$$\forall \hat{\mathbf{x}} \in [\mathbf{x}_1] \forall \breve{\mathbf{x}} \in [\mathbf{x}_2]\ f(\hat{\mathbf{x}}) < f(\breve{\mathbf{x}}) \tag{7}$$

czyli globalne minimum nie może znajdować się w przedziale $[\mathbf{x}_2]$ i przedział ten może zostać pominięty w dalszych obliczeniach.

Niech będzie dany wielowymiarowy przedział $[\mathbf{x}] \in \mathrm{IR}^n$. Podstawowy algorytm przedziałowej optymalizacji globalnej składa się z następujących kroków:

1) Przyjąć $[\mathbf{y}] = [\mathbf{x}]$ i $y = \hat{f}([\mathbf{x}])^-$. Zainicjować listę L=(($[\mathbf{y}]$,y)) oraz obliczyć $z = \hat{f}([\mathbf{x}])^+$.
2) Wybrać współrzędną $k \in \{1,2,...,n\}$ wzdłuż której dokonujemy podziału.
3) Podzielić przedział $[\mathbf{y}]$ wzdłuż k-tej współrzędnej $[\mathbf{y}] = [\mathbf{v}_1] \cup [\mathbf{v}_2]$.
4) Obliczyć $\hat{f}([\mathbf{v}_i])$, $v_i = \hat{f}([\mathbf{v}_i])^-$ dla i=1,2 oraz $z = \min\{z,\ \hat{f}([\mathbf{v}_1])^+,\ \hat{f}([\mathbf{v}_2])^+\}$.
5) Usunąć parę ($[\mathbf{y}]$, y) z listy L.
6) Usunąć pary $([\mathbf{v}_i], v_i)$ jeśli $v_i > z$ (i=1,2).
7) Dodać pozostałe pary $([\mathbf{v}_i], v_i)$ do listy L.
8) Jeśli lista L jest pusta należy zatrzymać obliczenia.
9) Oznaczyć parę z najmniejszym elementem v jako $([\mathbf{y}], y)$.
10) Jeśli szerokość przedziału $[\mathbf{y}]$ jest mniejsza niż ε, drukuj $\hat{f}([\mathbf{y}])$, $[\mathbf{y}]$ oraz zatrzymać obliczenia.
11) Przejść do kroku 2.

Ponadto wprowadzono wiele dodatkowych procedur przyspieszających zbieżność prezentowanego algorytmu. Można tu wymienić sprawdzanie monotoniczności [3], test punktu środkowego [3], przedziałową metodę Newtona [3] itp. Przedstawiony algorytm może zostać uogólniony na przypadek optymalizacji z ograniczeniami.

3 Optymalizacja układów z niepewnymi parametrami

Założymy teraz, że optymalizowana konstrukcja zawiera pewne parametry niepewne $\mathbf{h}$. Do modelowania niepewności parametrów zastosuję zbiory rozmyte oraz przedziały liczbowe. Aby uniknąć nieporozumień zostaną wykorzystane następujące oznaczenia $[\mathbf{h}] \in \mathrm{IR}^n$ (wielowymiarowe przedziały), $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathrm{F}(\mathrm{R}^n)$ (zbiór rozmyty, F(R) oznacza rodzinę zbiorów rozmytych określonych na zbiorze R^n por. np. [1]), $\mathbf{h} \in \mathrm{R}^n$ (element przestrzeni

R^n). Założę ponadto, że niepewności parametrów będą odpowiednio małe (por. [8]), oraz nie posiadamy dostatecznej ilości informacji do określenia losowych charakterystyk.

Niech $\mathbf{x}^{min}(\mathbf{h}_0)$ oznacza rozwiązanie optymalne dla pewnego $\mathbf{h}_0 \in [\mathbf{h}] \subset R^n$. Stosując ilorazy różnicowe można obliczyć:

$$\frac{\partial \mathbf{x}^{min}(\mathbf{h}_0)}{\partial h_j} \approx \frac{\mathbf{x}_{min}(h_{01},\ldots,h_{0j}+\Delta h_j,\ldots,h_{0n}) - \mathbf{x}_{min}(\mathbf{h}_0)}{\Delta h_j} \tag{8}$$

Jeśli znamy znak pochodnych $\frac{\partial x_i^{min}}{\partial h_j}$, to można obliczyć ekstremalne wartości rozwiązania na podstawie znaku pochodnej.

$$\text{Jeśli } \frac{\partial x_i^{min}(\mathbf{h}_0)}{\partial h_j} > 0 \quad (x_i^{min})^- = x_i^{min}(\ldots,h_j^-,\ldots), \quad (x_i^{min})^+ = x_i^{min}(\ldots,h_j^+,\ldots) \tag{9}$$

$$\text{Jeśli } \frac{\partial x_i^{min}(\mathbf{h}_0)}{\partial h_j} < 0 \quad (x_i^{min})^- = x_i^{min}(\ldots,h_j^+,\ldots), \quad (x_i^{min})^+ = x_i^{min}(\ldots,h_j^-,\ldots) \tag{10}$$

gdzie

$$\left[(x_i^{min})^-,(x_i^{min})^+\right] = \left\{x_i^{min}(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \in [\mathbf{h}]\right\} \tag{11}$$

W analogiczny sposób można obliczyć ekstremalne wartości funkcji celu.
Jeśli niepewne parametry będą liczbami rozmytymi, to funkcje przynależności optymalnego rozwiązania otrzymujemy stosując następujący algorytm:

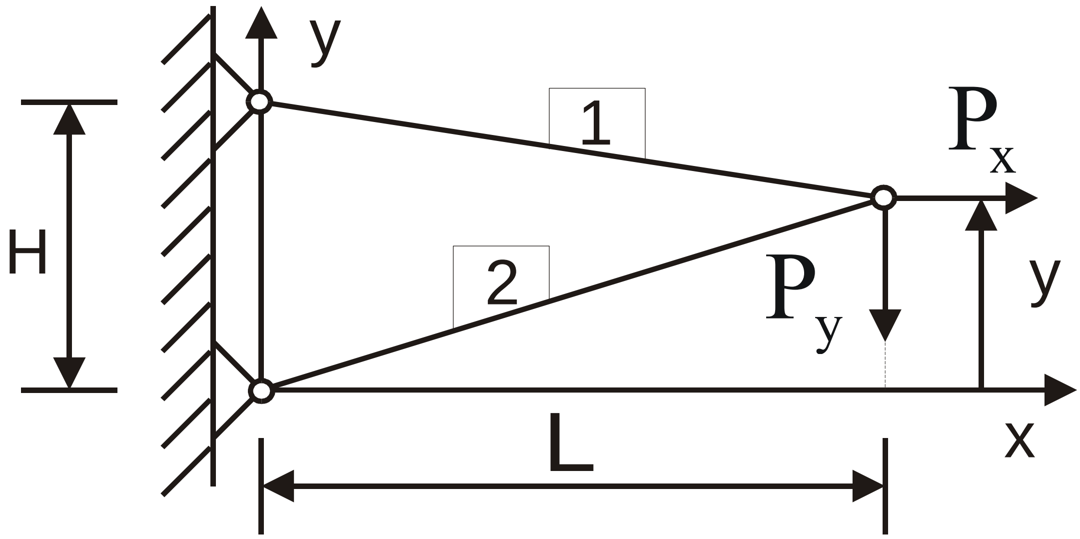
$$\Omega_i^\alpha = \left\{x_i^{min}(\mathbf{h}) : h_i \in \tilde{h}_{i\alpha}\right\} \quad \text{gdzie} \quad \tilde{h}_{i\alpha} = \left\{h_i : \mu(h_i \mid \tilde{h}_i) \geq \alpha\right\} \tag{12}$$

gdzie $\mu : R^n \to [0,1]$ jest funkcją przynależności (por. np. [1]). Funkcję przynależności rozwiązania optymalnego otrzymujemy na podstawie następującego wzoru [1]:

$$\mu(x_i \mid \tilde{x}_i^{min}) = sup\{\alpha : x_i \in \Omega_\alpha\} \tag{13}$$

4 Przykład numeryczny

Rozważymy teraz konstrukcję prętową przedstawioną na rysunku 1. W obliczeniach przyjmę następujące oznaczenia L=H=1 [m], σ_0=190 [MPa], P_x=255 [kN], P_y=-500 [kN], $y \in [0,1]$ [m], $\gamma = 76{,}5\left[\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^3}\right]$. Wyniki obliczeń numerycznych są przedstawione w tabeli 1.



Rys. 1. Schemat statyczny kratownicy

Fig. 1. Static scheme of the truss structure

Tabela 1

Lokalna optymalizacja			Przedziałowa optymalizacja globalna		
y [m]	A_1 [m^2]	A_2 [m^2]	y [m]	A_1 [m^2]	A_2 [m^2]
0.267	$3.707 \cdot 10^{-3}$	$1.706 \cdot 10^{-3}$	[0.26740, 0.26765]	$[3.70706 \cdot 10^{-3}, 3.70709 \cdot 10^{-3}]$	$[1.70627 \cdot 10^{-3}, 1.70672 \cdot 10^{-3}]$

Założymy teraz, że parametry σ_0 oraz P będą trapezowymi liczbami rozmytymi o funkcjach przynależności danych w postaci α-przekrojów w tabeli 2.

Tabela 2

α	$\tilde{\sigma}_{0\alpha}$ [MPa]	$\tilde{P}_{x\alpha}$ [kN]	$\tilde{P}_{y\alpha}$ [kN]
1	[189, 191]	[250, 260]	[-505, -495]
0	[185, 195]	[250, 300]	[-515, -485]

Pochodne określone wzorem (8) obliczone zostały dla środków przedziałów (odpowiednich α-przekrojów liczb rozmytych $\tilde{\sigma}_0, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y$) i zestawione zostały w tabeli 3.

α-przekroje liczby rozmytej reprezentującej rozwiązanie optymalne zostały przedstawione w tabeli 4.

Tabela 3

α	$sign\left(\dfrac{\partial y}{\partial \sigma_0}\right)$	$sign\left(\dfrac{\partial y}{\partial P_x}\right)$	$sign\left(\dfrac{\partial y}{\partial P_y}\right)$
0	0	-1	1
0.5	0	-1	1
1	0	-1	1

Tabela 4

α	y_α [m]
0	[0.256, 0.278]
0.5	[0.217, 0.281]
1	[0.162, 0.284]

Obliczenia zostały wykonane przy wykorzystaniu autorskiego programu napisanego w języku C++. Zastosowano programowanie obiektowe.

5 Wnioski

Dzięki zastosowaniu algorytmu gradientowego w bardzo szybkim czasie otrzymano rozwiązanie problemu lokalnej optymalizacji. Algorytm przedziałowy pozwala sprawdzić czy otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem globalnym. Zastosowanie algorytmu hybrydowego pozwala w bardzo znacznym stopniu przyspieszyć obliczenia wykonywane algorytmem przedziałowym. Przy pomocy przedstawionego algorytmu można optymalizować układy z przedziałowymi i rozmytymi parametrami. Modelowanie przedziałowych niepewności oparto na testach monotoniczności (por. [8]).

Praca została wykonana w ramach grantu KBN nr 8T11F00615 pt. „Przedziałowe i jakościowe metody modelowania niepewności w układach fizycznych”.

LITERATURA

1. Buckley J.J.: On using a-cuts to evaluate fuzzy equations, Fuzzy Sets and Systems, Vol.38, 1990, s.309-312.
2. Cameron T.M. Thirunavukarasu A.C., El-Sayed M.E.M.: Optimization of frame structure with flexible joints. Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.19, 2000, pp. 204-213.
3. Hansen E.R.: Global optimization using interval methods. New York, Marcel Dekker, 1992.
4. Kleiber M.: Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics, Theory and Finite Element Computations, John Willey & Sons, New York 1997.
5. Moore R.E.: Interval Analysis, New Jersey, Prentice-Hall, 1966.
6. Neumaier A.: http://solon.cma.univie.ac.at/~neum/glopt.html, 1998.
7. Pownuk A.: Przedziałowe metody optymalizacji konstrukcji. Proc. XLV Konferencja Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN oraz Komitetu Nauki PZiTB "Krynica'99", Tom 1, Krynica, 1999, s.135-142.
8. Pownuk A.: Zastosowanie metod analizy wrażliwości do modelowania konstrukcji z przedziałowymi parametrami. Proc. XLVI Konferencja Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN oraz Komitetu Nauki PZiTB "Krynica'2000", Krynica, 2000, (referat przyjęty do druku w materiałach konferencyjnych).

Abstract:

The problem of optimal design consists in finding the optimum parameters according to a prescribed optimality criterion. Existing optimization methods usually aren't reliable or can't use the nondifferentiable, not continuous objective functions or constraints. An interval global optimization method is: very stabile and robust and universally applicable. The interval algorithm guarantees that all stationary global solutions have been found. Unfortunately application of this algorithm is sometimes a very time consuming task. The best local optimization methods are the gradient methods. In this paper a hybrid gradient-interval global optimisation method is presented. This method has the best features of both methods i.e. fast local and reliable global convergence. In this paper this algorithm was applied to optimization of truss structures. Examples of optimization of truss structures with uncertain parameters was also presented.