Zastosowanie algebry rozmytej do prognozowania kosztów inwestycji budowlanych.

Mgr inż. Michał Bętkowski, dr inż. Andrzej Pownuk
Wydział Budownictwa
Politechnika Śląska w Gliwicach
Michal.Betkowski@polsl.pl, Andrzej.Pownuk@polsl.pl

Streszczenie. Oszacowanie wartości robót budowlanych jest jednym z kluczowych problemów związanych z przygotowaniem inwestycji. Jest to podstawą do analizy opłacalności i zapewnienia źródeł finansowania. Główną źródłem informacji przy sporządzaniu kosztorysu inwestorskiego są dostępne na rynku bazy cenowe. Często jednak informacje o cenach jednostkowych za dany typ robót różnią się dość znacznie - skutkiem są istotne różnice oszacowanych wartość robót przez inwestora i oferowanych cen przez wykonawców. W pracy przedstawiono propozycje szacowania kosztów robót budowlanych przy wykorzystaniu algebry liczb rozmytych ujmujących niepewny charakter danych. Przedstawiona metoda pozwala na oszacowanie wrażliwości kosztów całkowitych na różnej wielkości zaburzenia kosztów poszczególnych zadań.

1 Wstęp

Jednym z kluczowych problemów, przed którym stoi przyszły inwestor jest określenie wartości robót. Klasyczny kosztorys inwestorski w obecnych czasach staje się narzędziem w coraz mniejszym stopniu użytecznym. Różnice pomiędzy oszacowanymi wartościami w kosztorysie inwestorskim, a tym, co zaproponują wykonawcy w kosztorysach ofertowych różni się w dużym stopniu. Przewidzenie wartości robót jest bardzo istotnym elementem - często decydującym o podjęciu dalszych kroków w kierunku realizacji inwestycji oraz przygotowania przyszłego modelu finansowania. Wolny rynek, indywidualne podejście do kalkulacji kosztów sprawia, że jest to trudny proces. Dodatkowym utrudnieniem w sporządzeniu kosztorysu inwestorskiego jest fakt istnienia dość znacznych różnic cen jednostkowych robót budowlanych. Istnieją też znaczne różnice pomiędzy opracowaniami firm monitorujących rynek, często są również podawane pewne przedziały wartości cen lub wartości minimalne, średnie maksymalne. Istotnym wydaje się opracowanie narzędzia pozwalającego uwzględnić charakter danych. W artykule autorzy przedstawią próbę zastosowania zmiennej rozmytej reprezentującej cenę jednostkową w sporządzaniu kosztorysu inwestorskiego.

2 Kosztorys inwestorski

Kosztorys inwestorski [12] stanowi kalkulację szacunkową kosztów wykonania robót i jest przygotowywany przez inwestora. Podstawą sporządzania kosztorysu inwestorskiego jest
1) dokumentacja projektowa,
2) specyfikacja techniczna wykonania i odbioru robót,
3) przedmiar robót,
4) założenia wyjściowe do kosztorysowania,
5) ceny jednostkowe - dla kalkulacji uproszczonej
6) jednostkowe nakłady rzeczowe zawarte w katalogach lub ustalone na podstawie kalkulacji indywidualnej - dla kalkulacji szczegółowej,
7) ceny jednostkowe czynników produkcji oraz wskaźniki kosztów pośrednich i narzutu zysku - dla kalkulacji szczegółowej.

W dalszej części artykułu skupimy się na przykładzie metody kalkulacji uproszczonej.

Kalkulacja uproszczona polega na obliczeniu ceny kosztorysowej obiektów lub robót budowlanych, jako sumy iloczynów odpowiednio ustalonych jednostek przedmiarowych i cen jednostkowych według następującej formuły:

$$C_K = \sum_{i=1}^{N} L_i \cdot Cj_i + P_V \tag{1}$$

gdzie: C_K jest ceną kosztorysową, Cj_i cenami jednostkowymi L_i ilością jednostek przedmiarowych P_V podatkiem od towarów i usług.. Dla robót budowlanych zasady określania ilości jednostek przedmiarowych są szczegółowo przedstawione w zasadach przedmiarowania podanych w katalogach zawierających jednostkowe nakłady rzeczowe oraz szczegółowe opisy robót.

3 Ceny jednostkowe robót.

Ceny jednostkowe robót są pozyskiwane z powszechnie dostępnych źródeł [6,10,14] za wykonanie określonej jednostki przedmiarowej robót, na odpowiednim poziomie ich agregacji. Istotnym problemem przy sporządzaniu kosztorysu inwestorskiego jest ustalenie poziomu cen jednostkowych. Informacje uzyskane z dostępnych źródeł różnią się dość istotnie. Wybór konkretnego źródła informacji wprowadza sztuczną dokładność tam gdzie jej nie ma, poza tym cenniki są średnimi uzyskanymi z wielu firm budowlanych. Dlatego nie wydaje się celowe przyjmowanie precyzyjnych cen jednostkowych na etapie sporządzania kosztorysu inwestorskiego – jest to sztuczne wprowadzanie precyzji do oszacowania, gdyż istnieje nikłe prawdopodobieństwo, że podobne ceny jednostkowe przyjmie wykonawca w swym kosztorysie ofertowym.

4 Konstrukcja liczby rozmytej na podstawie niepewnych danych

Niech dana jest pewna przestrzeń probabilistyczna (P,Ω,Ξ), gdzie P jest pewną miarą probabilistyczną Ω jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych, Ξ jest σ -ciałem zdarzeń. Na zbiorze Ω określimy zmienną losową o wartościach przedziałowych.

$$\hat{X} : \Omega \ni \omega \to \hat{X}(\omega) \in I(R) \tag{2}$$

gdzie $I(R)$ jest zbiorem wszystkich przedziałów określonych w zbiorze liczb rzeczywistych. Przedział $\hat{X}(\omega) = \left[X^-(\omega), X^+(\omega)\right]$ może być również zdegenerowany do punktu $X^-(\omega) = X^+(\omega)$. Realizacje zmiennej losowej $\hat{X}(\omega)$ mogą być interpretowane jako pomiary pewnego parametru *X*.

Jeśli mamy do dyspozycji dużo danych oraz są one liczbami (czyli $X^-(\omega) = X^+(\omega)$), to do scharakteryzowania zmiennej *X* można wykorzystać teorię prawdopodobieństwa. W idealnym przypadku jesteśmy w stanie skonstruować funkcję gęstości zmiennej losowej *X*, czyli $f_X(x)$.

W praktyce często bywa, że nie dysponujemy dostateczną liczbą danych, aby można było w pełni określić ich probabilistyczne charakterystyki. Poza tym, czasem otrzymane informacje są bardzo niepewne i możemy podać jedynie przedział, do którego należy badana wielkość.

Jeśli dany jest przedział $\hat{x}_\alpha = \left[x_\alpha^-,\ x_\alpha^+\right]$, to można określić prawdopodobieństwo:

$$Pl\left(\left[x_\alpha^-,\ x_\alpha^+\right]'\right) = P\left\{\omega : \hat{X}(\omega) \cap \left[x_\alpha^-,\ x_\alpha^+\right]' \neq \varnothing\right\} = \alpha \tag{3}$$

Symbol $Pl(A)$ oznacza górne prawdopodobieństwo zbioru *A* [5]. Wartości przedziałowej zmiennej losowej można sparametryzować przy pomocy pewnego parametru *h*.

$$\hat{X}(\omega) = \left\{X(\omega,h) : h \in \hat{h} = \left[h^-, h^+\right]\right\} \tag{4}$$

Teraz górne prawdopodobieństwo zbioru *A* można określić następująco:

$$Pl(A) = P\left\{\omega : \hat{X}(\omega) \cap A \neq \varnothing, \omega \in \Omega\right\} = P\left\{\omega : X(\omega,h) \in A, \omega \in \Omega, h \in \hat{h}\right\} \tag{5}$$

Ponieważ

$$\left[x_\alpha^-,\ x_\alpha^+\right]' = \left(-\infty, x_\alpha^-\right) \cup \left(x_\alpha^+, \infty\right) \tag{6}$$

dlatego

$$Pl\left(\left[x_\alpha^-,\, x_\alpha^+\right]'\right) = P\left\{\omega : \hat{X}(\omega) \cap \left(\left(-\infty, x_\alpha^-\right) \cup \left(x_\alpha^+, \infty\right)\right) \neq \varnothing\right\} = \alpha \tag{7}$$

Jeśli zdefiniujemy rodzinę przedziałów $\hat{x}_\alpha$ zależną od parametru α taką, że

$$\left[x_{\alpha_1}^-,\, x_{\alpha_1}^+\right] \supseteq \left[x_{\alpha_2}^-,\, x_{\alpha_2}^+\right] \quad \text{jeśli} \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \tag{8}$$

$$Pl\left(\left[x_{\alpha_1}^-, x_{\alpha_1}^+\right]\right) = P\left\{\omega : \hat{X}(\omega) \cap \left(\left(-\infty, x_{\alpha_1}^-\right) \cup \left(x_{\alpha_1}^+, \infty\right)\right) \neq \varnothing\right\} = \alpha_1 \tag{9}$$

$$Pl\left(\left[x_{\alpha_2}^-, x_{\alpha_2}^+\right]\right) = P\left\{\omega : \hat{X}(\omega) \cap \left(\left(-\infty, x_{\alpha_2}^-\right) \cup \left(x_{\alpha_2}^+, \infty\right)\right) \neq \varnothing\right\} = \alpha_2 \tag{10}$$

Na podstawie pracy [4] można przyjąć, że funkcja

$$\mu(x \mid F) = \sup\left\{\alpha : x \in \left[x_\alpha^-, x_\alpha^+\right]\right\} \tag{11}$$

jest funkcją przynależności zbioru pewnego rozmytego *F*. Podobna koncepcja definicji zbioru rozmytego znajduje się w pracy [7] i oparta jest na tzw. „chmurach" (clouds).
Tak otrzymaną funkcję przynależności zbioru rozmytego można przetransformować do funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej. Obecnie istnieje kilka metod, które umożliwiają osiągnięcie tego celu [1, 4], jednak w ogólności nie są one równoważne - dają różne funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa na podstawie tej samej funkcji przynależności zbioru rozmytego.
Na szczególną uwagę zasługują trzy metody:

Metoda 1

Niech dana jest pewna liczba rozmyta *F* oraz jej funkcja przynależności $\mu(x, F)$. Zdefiniujemy stałą *K* w następujący sposób.

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x \mid F)\, dx \tag{12}$$

Jeśli $K < \infty$, to funkcję gęstości odpowiadającą liczbie rozmytej $\mu(x, F)$ można określić jako [1]:

$$f(x) = \frac{1}{K}\mu(x \mid F) \tag{13}$$

Metoda-2

Metoda 2 polega na wykonaniu procedury odwrotnej do wzoru (7) [4]. Podobna metoda wykorzystana jest w pracy [7].

Metoda 3

Nich dana jest zmienna losowa o wartościach zbiorowych (2). Philippe Smets zaproponował następującą metodę konstrukcji odpowiadającej jej funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa [11].

$$f(x) = \sum_{\omega : x \in X(\omega)} \frac{P\{\omega\}}{\left|\hat{X}(\omega)\right|} \tag{14}$$

Jest to tzw. "pignistic transformation" [11].

5 Opis ceny jednostkowej przy wykorzystaniu funkcji przynależności zbiorów rozmytych

Niech $Cj_1, Cj_2, ..., Cj_N$ będą cenami jednostkowymi poszczególnych zadań oraz C_K będzie końcową ceną kosztorysową.

$$C_K = L_1 Cj_1 + L_2 Cj_2 + ... + L_N Cj_N + P_V = \sum_{i=1}^{N} L_i Cj_i + P_V \tag{15}$$

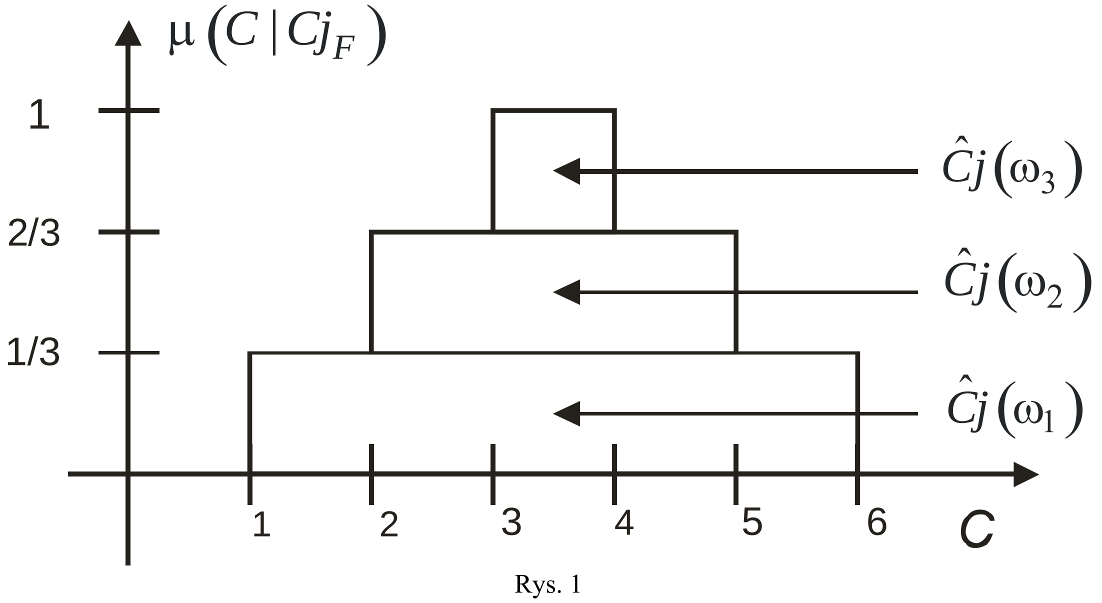
Z dostępnych źródeł można uzyskać informacje na temat poszczególnych cen jednostkowych. W zależności od źródła informacje te mogą się dość znacznie różnić. Często można z danego źródła można uzyskać jedynie informacje na temat minimalnej, maksymalnej i średniej ceny jednostkowej.

Jednak można zwykle oszacować górną $Cj^+(\omega)$ i dolną $Cj^-(\omega)$ granice wielkości ceny jednostkowej. Różne źródła reprezentowane są przez zdarzenie elementarne ω polegające na podaniu punktowej lub przedziałowej wartości ceny jednostkowej $\hat{C}j(\omega) = \left[Cj^-(\omega), Cj^+(\omega)\right]$.

Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω zawiera informacje (ω) na temat cen jednostkowych.
Dla każdej ceny jednostkowej C można zbudować rodzinę przedziałów ufności $\left[Cj_\alpha^-, Cj_\alpha^+\right]$, tak by był spełniony wzór (7):

$$Pl\left(\left[Cj_\alpha^-, Cj_\alpha^+\right]'\right) = P\left\{\omega : \hat{C}j(\omega) \cap \left(\left(-\infty, Cj_\alpha^-\right) \cup \left(Cj_\alpha^+, \infty\right)\right) \neq \varnothing\right\} = \alpha \tag{16}$$

Na rysunku 1 przedstawiono przykładową funkcję przynależności w przypadku, gdy $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ oraz $\hat{C}j(\omega_1) = [1,6]$, $\hat{C}j(\omega_2) = [2,5]$, $\hat{C}j(\omega_3) = [3,4]$.



Rys. 1

Przez $n(A)$ oznaczymy liczbę elementów zbioru *A*. Do oszacowania prawdopodobieństwa (16) będziemy wykorzystywali następujący estymator:

$$\alpha \approx \frac{n\left(\left\{i : \hat{C}j_i \cap \left(\left(-\infty, Cj_\alpha^-\right) \cup \left(Cj_\alpha^+, \infty\right)\right) \neq \varnothing\right\}\right)}{N} = \sum_{i : \hat{C}j_i \cap \left(\left(-\infty, Cj_\alpha^-\right) \cup \left(Cj_\alpha^+, \infty\right)\right) \neq \varnothing} \frac{1}{N} \tag{17}$$

gdzie $\hat{C}j_i$ są informacjami na temat ceny jednostkowej Cj oraz *N* jest liczba wszystkich pomiarów $\hat{C}j_i$.

W przypadkach, gdy przy oszacowywaniu wartości ceny jednostkowej *Cj* niektórym źródłom można przypisać różne wagi w_i (np. większa waga dala ceny średniej niż minimalnej oraz większa waga dla bardziej uznanych na rynku źródeł), to stopień przynależności α można oszacować następująco:

$$\alpha \approx \sum_{i:\hat{C}j_i \cap \left(\left(-\infty, Cj_\alpha^- \right) \cup \left(Cj_\alpha^+, \infty \right) \right) \neq \varnothing} \frac{w_i}{N} \tag{18}$$

Przy czym zakładamy, że $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$ dla wszystkich ceny jednostkowej *Cj*. Przy pomocy tak zdefiniowanych przedziałów można zdefiniować funkcję przynależności liczby rozmytej:

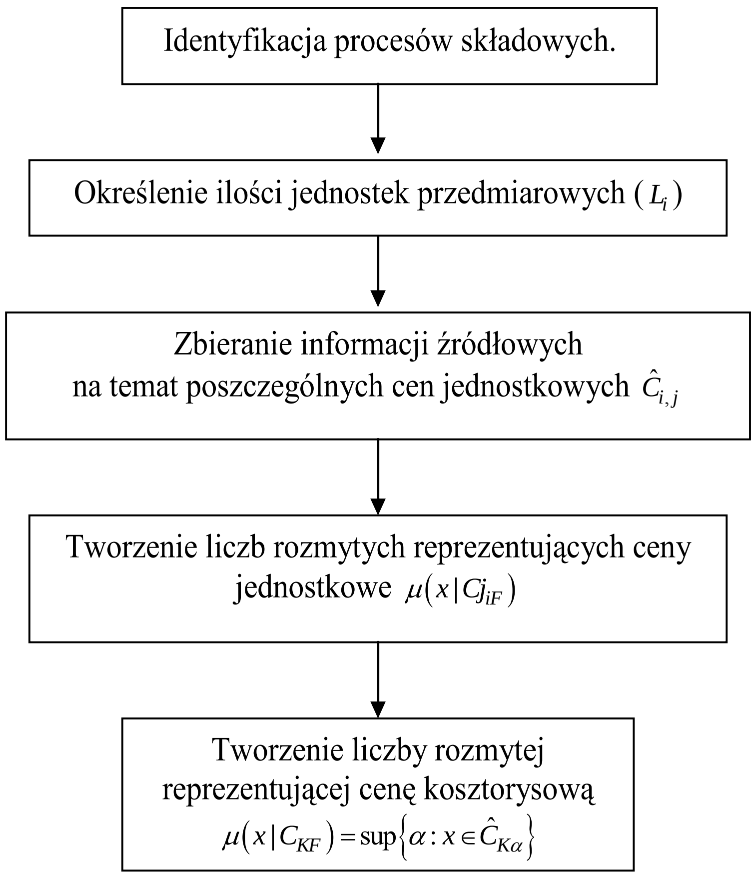
$$\mu\left(x \mid Cj_F\right) = \sup\left\{\alpha : x \in \hat{C}j_\alpha\right\} = \sup\left\{\alpha : x \in \left[Cj_\alpha^-, Cj_\alpha^+\right]\right\} \tag{19}$$

gdzie Cj_F oznacza zbiór rozmyty zdefiniowany przy pomocy funkcji przynależności $\mu\left(x \mid Cj_F\right)$. Przedział $\hat{C}j_\alpha = \left[Cj_\alpha^-, Cj_\alpha^+\right]$ może być traktowany jako definicja α-przekroju liczby rozmytej Cj_F :

$$Cj_{F\alpha} = \left[Cj_\alpha^-, Cj_\alpha^+\right] == \left\{x : \mu\left(x \mid Cj_F\right) \leq \alpha\right\}. \tag{20}$$

6 Procedura obliczania rozmytej ceny kosztorysowej

W tej chwili założymy, że dane są rozmyte ceny jednostkowe Cj_{iF} . Algorytm obliczania ceny kosztorysowej z wykorzystaniem zbiorów rozmytych opisujących ceny jednostkowe można przedstawia rys 2.



Rys. 2

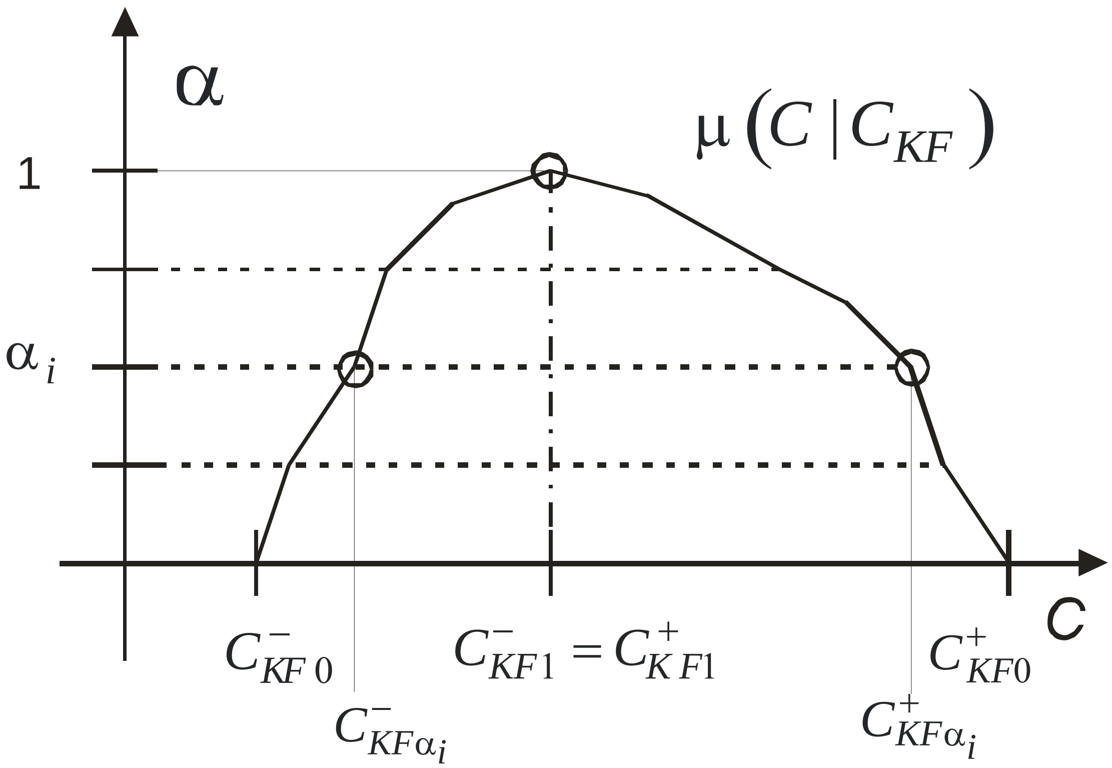
W celu obliczenia rozmytej ceny kosztorysowej należy obliczyć α-przekroje wszystkich liczb rozmytych Cj_{iF} oraz P_V i następnie na podstawie wzoru (1).

$$\hat{C}_{K\alpha} = \sum_{i=1}^{N} L_i \cdot \hat{C}j_{i\alpha} + \hat{P}_{V\alpha} \tag{21}$$

Ponieważ liczby $\hat{C}_{K\alpha}, \hat{P}_{V\alpha}, \hat{C}j_{i\alpha}$ są przedziałami, dlatego przedział $\hat{C}_{K\alpha}$ można obliczyć przy wykorzystaniu algebry przedziałowej [8].
Funkcję przynależności rozmytej ceny kosztorysowej można obliczyć na podstawie następującego wzoru:

$$\mu\left(x \mid C_{KF}\right) = \sup\left\{\alpha : x \in \hat{C}_{K\alpha}\right\}. \tag{22}$$

Algorytm obliczania ceny kosztorysowej z wykorzystaniem zbiorów rozmytych opisujących ceny jednostkowe można przedstawia rys 2.
Wynik przykładowej analizy wynikającej z zastosowania wzoru (21) przedstawiony jest na rysunku 3.



Rys. 3

7 Probabilistyczna interpretacja wyników obliczeń

Cena kosztorysowa otrzymana przy pomocy wzorów (21) informuje o tym, jaka jest wrażliwość ceny kosztorysowej na zmiany kosztów poszczególnych zadań. Innymi słowy szerokość α-przekroju może być interpretowana jako skończony przyrost ceny kosztorysowej jako funkcji poszczególnych kosztów $C_K = C_K\left(Cj_1, ..., Cj_N, P_V\right)$.

$$C_{K\alpha}^{+} - C_{K\alpha}^{-} = C_K\left(Cj_{1\alpha}^{+}, ..., Cj_{N\alpha}^{+}, P_{V\alpha}^{+}\right) - C_K\left(Cj_{1\alpha}^{-}, ..., Cj_{N\alpha}^{-}, P_{V\alpha}^{-}\right) \tag{23}$$

Niech $\hat{C}j_{i,j}$ oznacza *j*-tą informację na temat *i*-tej ceny jednostkowej C_j. Zatem każdej cenie jednostkowej odpowiada M_i informacji na temat tej ceny. Aby określić cenę kosztorysową potrzebna jest przynajmniej jedna informacja na temat każdej ceny jednostkowej. Czyli cenę jednostkową określamy na podstawie wektorów o postaci:

$$\left(\hat{C}j_{1,i_1},...,\hat{C}j_{N,i_N},P_{Vi}\right) \tag{24}$$

Zatem zbiór wszystkich informacji potrzebnych do zdefiniowania ceny kosztorysowej należy do następującego iloczynu kartezjańskiego:

$$\widehat{CK}=\left\{\hat{C}j_{1,1},...,\hat{C}j_{1,M_1}\right\}\times\left\{\hat{C}j_{2,1},...,\hat{C}j_{2,M_2}\right\}\times...\times\left\{\hat{C}j_{N,1},...,\hat{C}j_{N,M_N}\right\}\times\left\{\hat{P}_{V1},...,\hat{P}_{VM_P}\right\} \tag{25}$$

Elementy zbioru $\widehat{CK}$ będziemy oznaczali $\widehat{CK}_{i_1i_2...i_Ni_P}=\left(\hat{C}j_{1,i_1},\hat{C}j_{2,i_2},...,\hat{C}j_{N,i_N},\hat{P}_{Vi_P}\right)$. Zbiór ten posiada $Q=M_1\cdot M_2\cdot...\cdot M_N\cdot M_P=M_P\prod_{i=1}^{N}M_i$ elementów.

Prawdopodobieństwo związane z danym α-przekrojem ceny kosztorysowej $\hat{C}_{K\alpha}$ można oszacować następująco:

$$\frac{n\left(\left\{\widehat{CK}_{i_1i_2...i_Ni_P}:C_K\left(\hat{C}j_{1i_1},\hat{C}j_{2i_2},...,\hat{C}j_{Ni_N},\hat{P}_{Vi_P}\right)\cap\left(R\setminus\hat{C}_{K\alpha}\right)\neq\varnothing\right\}\right)}{M_1\cdot M_2\cdot...\cdot M_N\cdot M_P}\approx P\left\{C_K\cap\left(R\setminus\hat{C}_{K\alpha}\right)\neq\varnothing\right\} \tag{26}$$

gdzie funkcja $n(A)$ ma taką samą interpretacje jak w punkcie 5 (czyli oznacza liczbę elementów zbioru A). $C_K\left(\hat{C}j_{1i_1},\hat{C}j_{2i_2},...,\hat{C}j_{Ni_N},\hat{P}_{Vi_P}\right)$ jest ceną kosztorysową otrzymaną przy pomocy cen jednostkowych $\hat{C}j_{1i_1},\hat{C}j_{2i_2},...,\hat{C}j_{Ni_N},\hat{P}_{Vi_P}$.

Zwykle prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że cena kosztorysowa będzie miała niepusty przekrój z dopełnieniem α-przekroju $\hat{C}_{K\alpha}$ (czyli zbiorem $R\setminus\hat{C}_{K\alpha}$) jest różne od stopnia przynależności α, który odpowiada danemu α-przekrojowi.

$$P\left\{\hat{C}_K\cap\left(R\setminus\hat{C}_{K\alpha}\right)\neq\varnothing\right\}\neq\alpha \tag{27}$$

Dlatego wyników otrzymanych przy pomocy teorii zbiorów rozmytych nie można interpretować jako prawdopodobieństwa. Funkcja przynależności informuje jedynie o wrażliwości ceny kosztorysowej na zaburzenia cen jednostkowych. W celu otrzymania informacji na temat prawdopodobieństwa należy wykonać dodatkowe obliczenia przy pomocy wzoru (26).

Jak widać modelowanie kosztów przy pomocy liczb rozmytych można równoważnie zastąpić przez modelowanie kosztów przy mocy rodziny przedziałów (tzw. α-przekrojów).

W przypadku, gdy dysponujemy małą ilością danych pomiarowych stosowanie wzoru (26) staje się szczególnie interesujące.

W ogólnym przypadku w celu otrzymania dokładniejszego probabilistycznego opisu można wykorzystać teorię prawdopodobieństwa nieprecyzyjnego (np. [7]) lub też teorię rozmytych zmiennych losowych [9].

Prace nad bardziej precyzyjnym opisem niepewności są przedmiotem obecnych przyszłych badań autorów (część z nich zostanie zaprezentowana na tej konferencji).

8 Wnioski

Ograniczając się przy sporządzaniu kosztorysu inwestorskiego do jednego źródła danych, wprowadzamy sztuczną dokładność tam gdzie nie wynika ona rzeczywistego charakteru danych. Ilość danych na ogół jednak nie pozwala nam na przypisanie do nich charakterystyk probabilistycznych. Możemy natomiast do opisu ceny jednostkowej wykorzystać zmienną rozmytą.

Liczby rozmyte można zdefiniować jako zbiór przedziałów ufności danych początkowych. Tak zdefiniowane liczby rozmyte posiadają prostą interpretacje na gruncie teorii prawdopodobieństwa. Podobna koncepcja znajduje się w pracy [7]. W literaturze można jednak znaleźć inne interpretacje funkcji przynależności zbioru rozmytego [2] jak również sposoby transformacji funkcji przynależności zbioru rozmytego do funkcji gęstości prawdopodobieństwa [1, 4, 11].

Wyniki otrzymane przy pomocy teorii zbiorów rozmytych informują o wrażliwości wyników na zmiany danych początkowych i mogą zostać wykorzystane do prognozowania wartości ofert. W celu określenia probabilistycznej interpretacji wyników należy wykonać dodatkowe obliczenia. Zwykle stopień przynależności zbioru rozmytego nie odpowiada prawdopodobieństwu związanemu z danym α-przekrojem.

Literatura

[1] Barry R. Cobb and Prakash P. Shenoy, On the Plausibility Transformation for Transforming Belief Function Models to Probability Models. http://lark.cc.ku.edu/~pshenoy
[2] Bilgiç T., Turksen I.B., 1999, Measurement of Membership Functions: Theoretical and Empirical Work, Chapter 3 in D. Dubois, H. Prade (eds) Handbook of Fuzzy Sets and Systems Vol. 1, Fundamentals of Fuzzy Sets, Kluwer,
[3] Goodman I.R., 1982, Fuzzy sets as a equaivalence class of random sets. Fuzzy Sets and Possibility Theory, R. Yager ed.,
[4] Dubois D., Foulloy L., Mauris G., Probability-Possibility Transformations, Triangular Fuzzy Sets and Probabilistic Inequalities. Reliable Computing 10: 2004.
[5] Dubois D., Prade H., Random sets and fuzzy interval analysis. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 38, 1991
[6] Informacyjny zestaw średnich jednostkowych cen robót budowlanych ICRB – ORGBUD serwis – POZNAŃ – kwartalnik
[7] Neumaier A., Clouds, fuzzy sets and probability intervals, Reliable Computing 10, 2004.
[8] Neumaier A.: Interval methods for system of equations. Cambridge University, Press, 1990.
[9] Puri, M.L., and Ralescu, D.A., 1986, Fuzzy Random Variables, J. Math. Analysis and Applications, 114:409-422, 1986.
[10] Sekocenbud - Biuletyn cen robót budowlano-inwestycyjnych – Ośrodek Wdrożeń Ekonomiczno-Organizacyjnych „Promocja" Warszawa - kwartalnik
[11] Smets Ph. (1990) Constructing the pignistic probability function in a context of uncertainty. Uncertainty in Artificial Intelligence 5, M. Henrion, R.D. Shachter, L.N. Kanal, and J.F. Lemmer (Editors), Elsevier Science Publishers 1990,
[12] Środowiskowe Metody Kosztorysowania – Stowarzyszenie Kosztorysantów Budowlanych Zrzeszenie Biur Kosztorysowania Budowlanego - Warszawa – Grudzień 2001
[13] Zadeh, L., Fuzzy sets. Information and Control, 8(3), 1965
[14] Zbiór jednostkowych wskaźników cenowych z zakresu budownictwa ogólnego mieszkaniowego oraz przemysłowego na roboty inwestycyjne - Bistyp-Consulting - kwartalnik