Sympozjum
Trwałość Budowli

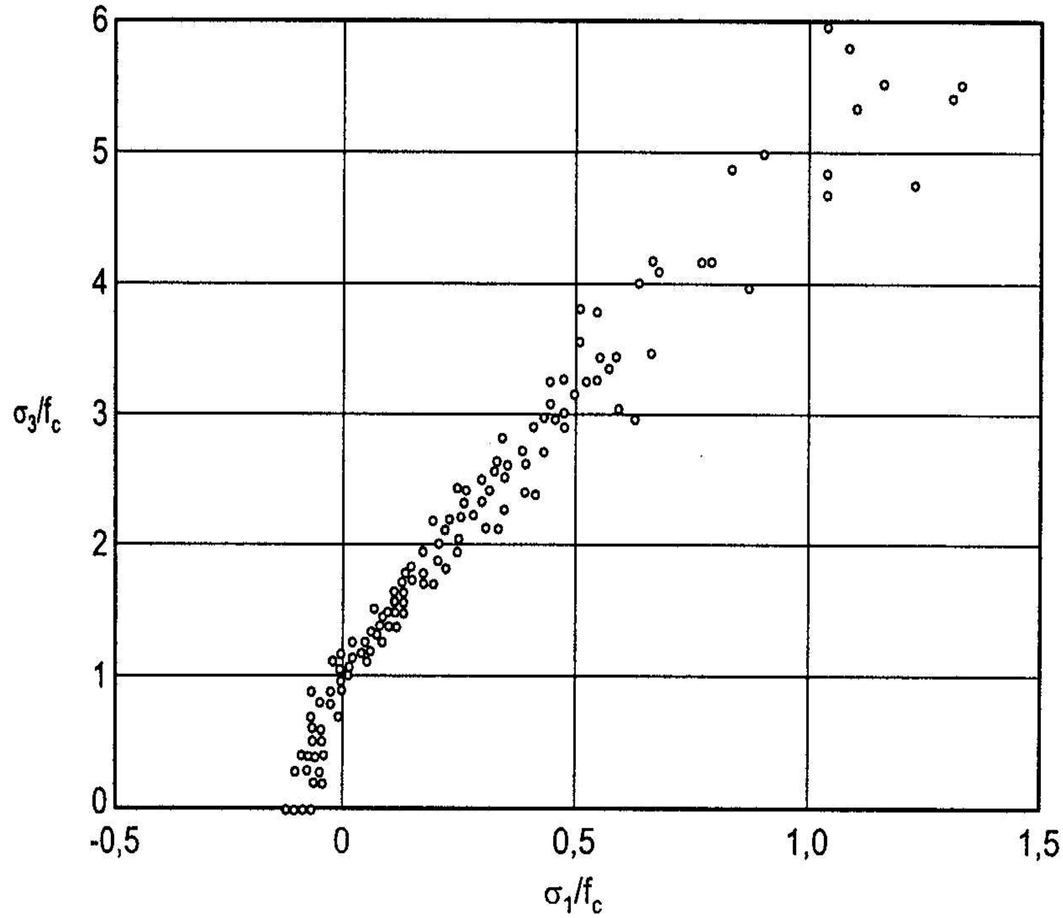
Andrzej Pownuk

PROJEKTOWANIE UKŁADÓW Z NIEPEWNYMI PARAMETRAMI

Zakład Mechaniki Teoretycznej
Politechnika Śląska

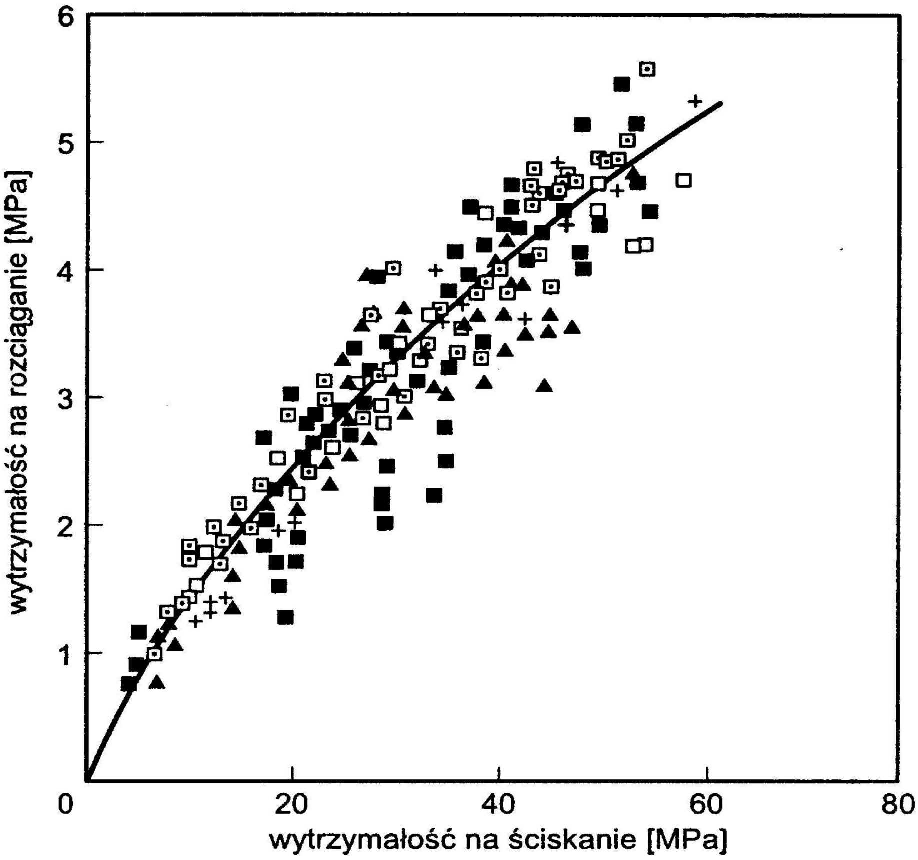
pownuk@zeus.polsl.gliwice.pl
URL: http://zeus.polsl.gliwice.pl/~pownuk

Wytrzymałość betonu

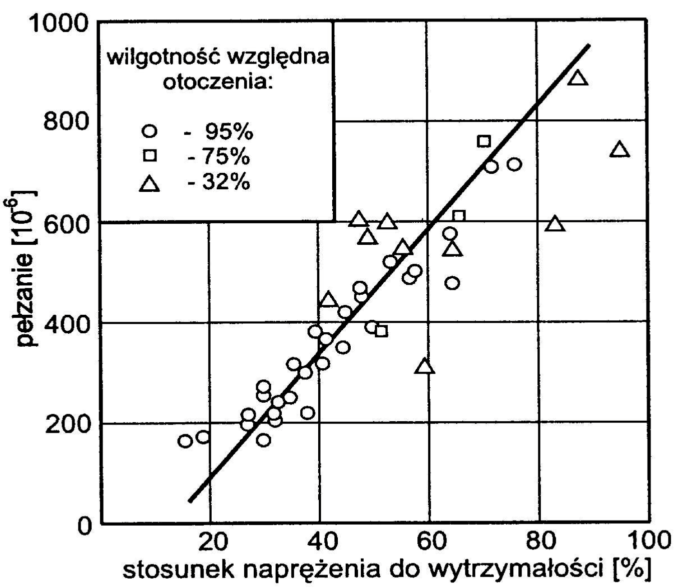


Rys. 6-27. Wytrzymałość betonu w wieloosiowym stanie naprężenia oznaczona przez różnych badaczy; betony mokre lub powietrznosuche (f_c – wytrzymałość na ściskanie)

Neville A.M., Właściwości betonu. Polski Cement Sp. z o.o., Kraków 2000



Rys. 6-37. Zależność między wytrzymałością na rozciąganie w próbie rozłupywania a wytrzymałością na ściskanie (mierzoną na normowych próbkach walcowych) według badań różnych autorów (zebrana przez *Oluokuna* [6.106])



Rys. 9-33. Pełzanie próbek z zapraw pielęgnowanych i w sposób ciągły, przechowywanych w atmosferze o różnej wilgotności [9.117]

Niepewności parametrów mają szczególnie duże znaczenie w następujących przypadkach:

- obliczanie konstrukcji murowych;
- mechanice gruntów;
- mechanice konstrukcji kompozytowych;
- ekspertyzach istniejących obiektów szczególnie konstrukcji zabytkowych;
- określanie wartości obciążeń np.:
  a) mosty
  b) tunele
  c) obciążenia nawierzchni drogowych

Metody modelowania niepewności

- metody półprobabilistyczne (wykorzystanie współczynników bezpieczeństwa)

$$\left|\sigma_{max}\right| \leq \frac{\sigma_0}{\gamma}$$

lub

$$g(\sigma_{max}, \gamma) \geq 0$$

- metody probabilistyczne

$$P(\left|\sigma_{max}\right| \leq \sigma_0) \geq R_0$$

lub

$$P(g(x) \geq 0) \geq R_0$$

Przykład funkcji granicznej
dla problemu rozciągania prętów

$$g(\mathbf{x}) = \sigma_0 - \frac{P}{A}$$

Wady metod półprobabilistycznych:

- mała dokładność;
- wartości współczynników bezpieczeństwa trudno ustalić na drodze eksperymentalnej.

Wady metod probabilistycznych:

- brak odpowiednich danych doświadczalnych (konstrukcje zabytkowe);
- zbyt mała liczba pomiarów uniemożliwia zastosowanie tych metod (koszty przeprowadzania pomiarów);
- idealizacja rzeczywistych procesów fizycznych poprzez zastosowanie rozkładu normalnego;
- brak losowego charakteru niektórych zjawisk (konstrukcje budowlane są bardzo często jednostkowe);
- krytyka teorii prawdopodobieństwa (nie da się jej zweryfikować w sposób ścisły, ponieważ nie można wykonać nieskończonej ilości pomiarów);

Podstawowe założenia procesu modelowania niepewności parametrów konstrukcji budowlanych

Istniejące teorie naukowe nie opisują dokładnie rzeczywistego zachwiania się konstrukcji.
(zwykle dokładność ta jest wystarczająca dla celów inżynierskich)

Każdy parametr konstrukcji budowlanej znany jest tylko z pewną dokładnością

W niektórych przypadkach wpływ niepewności parametrów jest na tyle duży, iż nie może zostać pominięty podczas obliczeń wytrzymałościowych.

Sam proces wykonywania obliczeń jest źródłem błędów (np. błędy zaokrągleń, linearyzacja itp.)

Identyfikacja parametrów przedziałowych

Przypadek I

Dostępne informacje

Dane doświadczalne $X(\omega_i)$.

Procedura obliczeń

Ustalamy poziom ufności $\alpha \in [0,1]$.

Przedział $\bar{x} = [x^-, x^+]$ ustalamy tak, aby

$$P(X \in \bar{x}) \geq \alpha$$

$$P(X \leq x^-) = P(X \geq x^+) = \frac{1 - \alpha}{2}$$

Jeśli nie można założyć, że wszystkie pomiary są jednakowo prawdopodobne tzn. $P(\{\omega_\mathrm{i}\}) = \frac{1}{N}$, to przyjmujemy, że $P(\{\omega_\mathrm{i}\}) \in [P^-, P^+]$ i wykorzystujemy koncepcję dolnego prawdopodobieństwa:

$$P^-(X \in \bar{x}) \geq \alpha$$

Przypadek II

Dostępne informacje

1) Dane doświadczalne $X(\omega_i)$. Mała liczba pomiarów.
2) Informacje na temat zachowania podobnych konstrukcji.

Procedura obliczeń

$$x_0^- = \min_i X(\omega_\mathrm{i}), \quad x_0^+ = \max_i X(\omega_\mathrm{i})$$

Przedział $\bar{x}$ otrzymujemy w wyniku oszacowania ekstremalnych wartości parametrów układu mechanicznego na podstawie przedziału $\bar{x}_0$ oraz wiedzy o zachowaniu się podobnych konstrukcji.

Przypadek III

Dostępne informacje

Informacje na temat zachowania podobnych konstrukcji.

Procedura obliczeń

Przedział $\bar{x}$ otrzymujemy w wyniku oszacowania ekstremalnych wartości parametrów układu mechanicznego na podstawie wiedzy o zachowaniu się podobnych konstrukcji.

Uwaga

Metoda ta może zostać wykorzystana jeśli podobne konstrukcje zachowują się podobnie (z pewną zadaną dokładnością).

Projektowanie konstrukcji z przedziałowymi parametrami

Niech bezpieczeństwo układu daje się opisać przy wykorzystaniu pewnej funkcji granicznej $y = g(x, \mathbf{h})$ oraz wektor parametrów $\mathbf{h}$ jest dany z dokładnością do wektora przedziałów $\overline{\mathbf{h}}$.

Projektowany parametr x obliczamy na podstawie następującej relacji

$$\bar{x} = \{x : g(x, \mathbf{h}) \geq 0, \mathbf{h} \in \overline{\mathbf{h}}\}$$

Dla porównania w metodzie półprobablistycznej przyjmujemy:

$$\bar{x} = \{x : g(x, \mathbf{h}_0, \gamma) \geq 0\}$$

W teorii prawdopodobieństwa przyjmujemy:

$$\bar{x} = \{x : P(g(x, \mathbf{h}) \geq 0) \geq R_0\}$$

Porównanie różnych metod projektowania.
A - projektowany parametr
P – parametr niepewny

Metoda półprobabilistyczna

$$g(A,P,\gamma)=\sigma_0-\frac{P\cdot\gamma_F}{A}$$

$$A\in\{A:\sigma_0-\frac{P\cdot\gamma_F}{A}\geq 0\}$$

Metoda probabilistyczna

$$g(A,P)=\sigma_0-\frac{P}{A}$$

$$A\in\{A:P\left(\sigma_0-\frac{P}{A}\geq 0\right)\geq R_0\}$$

Zastosowanie parametrów przedziałowych

$$g(A,P)=\sigma_0-\frac{P}{A}$$

$$A\in\{A:\sigma_0-\frac{P}{A}\geq 0, P\in\overline{P}\}$$

Związek metody parametrów przedziałowych z metodą półprobabilistyczną

Metoda półprobabilistyczna

$$P \in [0, P\gamma_F]$$

$$sup\, A = sup\{A : \sigma_0 - \frac{P \cdot \gamma_F}{A} \geq 0\} = \frac{P \cdot \gamma_F}{\sigma_0}$$

Metoda przedziałowa

$$\overline{P} = [P^-, P^+]$$

$$sup\, A = sup\{A : \sigma_0 - \frac{P}{A} \geq 0, P \in \overline{P}\} = \frac{P^+}{\sigma_0}$$

Porównując wyniki otrzymujemy

$$\boxed{P \cdot \gamma_F = P^+}$$

Wniosek

W przypadku problemu rozciągania prętów metoda półprobabilistyczna daje identyczne wyniki jak metoda parametrów przedziałowych.

Wniosek 2

Metoda przedziałowa daje wyniki identyczne jak metoda półprobabilistyczna w przypadku, gdy zależność pomiędzy projektowanym parametrem oraz parametrem niepewnym jest monotoniczna.

Warunek ten jest spełniony dla większości metod obliczeniowych wykorzystywanych w mechanice konstrukcji, gdy niepewności parametrów są dostatecznie małe.

Wniosek 3

Obecne stosowane normy projektowania wykorzystują przedziałowy model niepewności
oraz zakładają monotoniczną zależność pomiędzy projektowanym parametrem i parametrem niepewnym.

Wniosek 4

W przypadku, gdy nie potrafimy określić probabilistycznych charakterystyk parametrów konstrukcji należy zastosować metodę półprobabilistyczną zamiast probabilistycznej.

Zatem w pewnych przypadkach tradycyjne metody projektowania umożliwiają lepszy opis niepewności niż metody probabilistyczne.

Metoda przedziałowa umożliwia wykorzystanie istniejących współczynników bezpieczeństwa w obliczeniach wykonywanych przy wykorzystaniu komputerowych metod mechaniki ciał stałych.

Przyjmujemy wtedy

$$h \in [0,\ h_0 \cdot \gamma_{\mathrm{h}}]$$

h_0 - wartość charakterystyczna parametru h

$h_0 \cdot \gamma_h$ - wartość obliczeniowa parametru h

Projektowany parametr x można obliczyć na podstawie jednego z dwóch następujących warunków.

$$sup\{x : g(x, h_1, ..., h_m) \geq 0, h_i \in [0, h_i^0 \cdot \gamma_{h_{\mathrm{i}}}]\}$$

lub

$$inf\{x : g(x, h_1, ..., h_m) \geq 0, h_i \in [0, h_i^0 \cdot \gamma_{h_{\mathrm{i}}}]\}$$

Przykład

$$\sigma_0 \in [0, \sigma_0 \cdot \gamma_{\mathrm{C}}] = \overline{\sigma}_0, \quad P \in [0, P_0 \cdot \gamma_f] = \overline{P}$$

$$sup\ A = sup\{A : \sigma_0 - \frac{P}{A} \geq 0, P \in \overline{P}, \sigma_0 \in \overline{\sigma}_0\}$$

Podejście takie umożliwia uwzględnianie parametrów losowych oraz przedziałowych równocześnie.

Niech $\mathbf{Y}$ będzie wektorem losowym oraz $\overline{\mathbf{h}}$ wektorem parametrów przedziałowych. Projektowany parametr x należy do następującego przedziału

$$\overline{x} = \{x : P(g(x, \mathbf{Y}, \mathbf{h}) < 0) < P_f^0, \mathbf{h} \in \overline{\mathbf{h}}\}$$

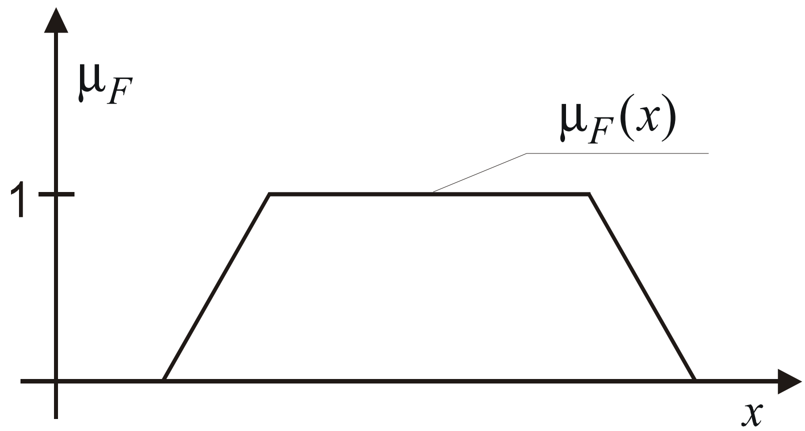
lub

$$\overline{x} = \{x : \int_{\{\mathbf{y}:\, g(x,\mathbf{y},\mathbf{h})<0,\, \mathbf{h}\in\overline{\mathbf{h}}\}} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} < P_f^0\}$$

W zależności od charakteru parametru do obliczeń przyjmujemy *inf* $\overline{x}$ lub *sup* $\overline{x}$.

W przypadku, gdy pomiary są przedziałami liczbowymi lub pomiary nie są otrzymywane z jednakowym prawdopodobieństwem wykorzystujemy koncepcję górnego i dolnego prawdopodobieństwa.

Prezentowany algorytm można uogólnić na przypadek, gdy parametry modelowane są przy wykorzystaniu liczb rozmytych.



Wnioski

Modelowanie niepewności parametrów ma szczególnie duże znaczenie w konstrukcjach murowych, kompozytowych, zabytkowych, geomechanice oraz biomechanice.

Przedziałowe parametry można otrzymać na drodze eksperymentalnej. Najlepiej przy wykorzystaniu koncepcji górnego i dolnego prawdopodobieństwa.

Metoda półprobabilistyczna daje identyczne wyniki jak algorytm oparty na parametrach przedziałowych.

Wykorzystując prezentowaną metodologię można uogólnić istniejące współczynniki bezpieczeństwa na przypadek projektowania z wykorzystaniem systemów CAD/CAM.

Prezentowany algorytm umożliwia projektowanie układów o parametrach losowych oraz przedziałowych.